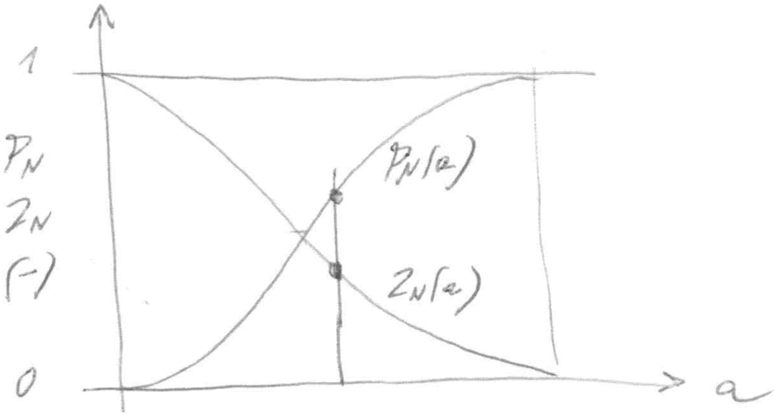
1. Analytické vyjádření křivek zrnitosti

opakování – zrnitost částic – rozdělení velikostí částic

dle N, A, M

křivky zrnitosti



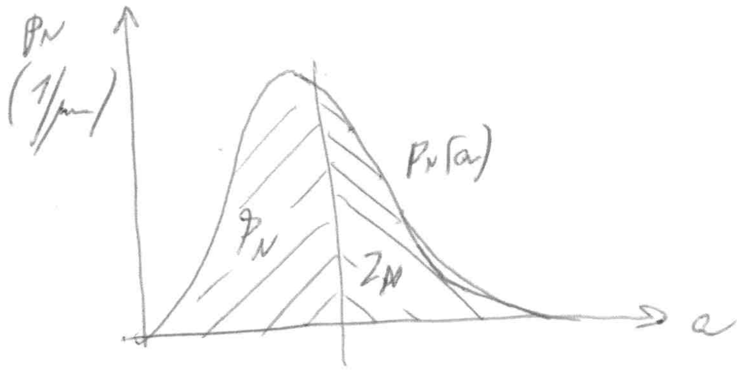
$$dP_N(a) = p_N(a)\,da$$

$$P_N(a) = \int_0^a p_N(a)\,da$$

$$Z_N(a) = \int_a^\infty p_N(a)\,da$$

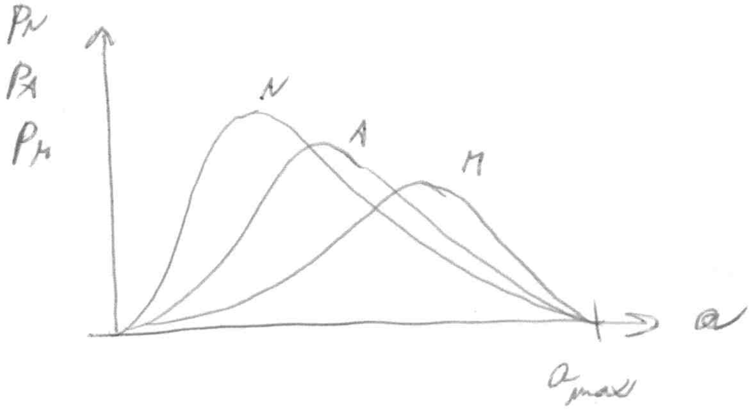
modus : $p_N(a_{mod,N}) = \max.$

medián : $Z_N(a_{med,N}) = P_N(a_{med,N}) = 0{,}5$



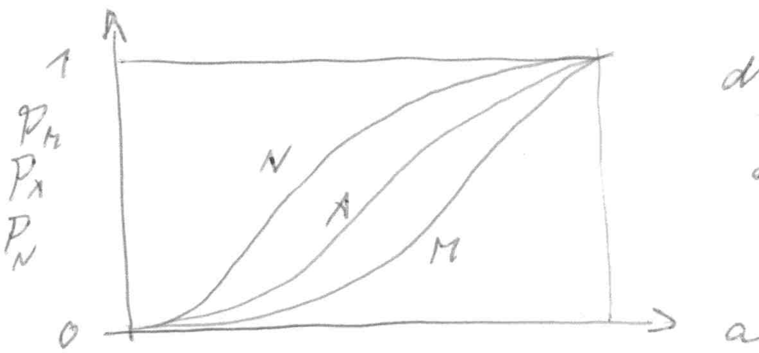
střední velikosti

$$\overline{a_{N,\nu}} = \left[\int_0^{a_{max}} a^\nu p_N(a)\,da\right]^{1/\nu}$$



$$p_A(a) = p_N(a)\,\frac{a^2}{(\overline{a_{N,2}})^2}$$

$$p_M(a) = p_N\,\frac{a^3}{(\overline{a_{N,3}})^3}$$



$$dP_N(a) = -dZ_N(a) = \frac{dN}{N} = p_N(a)\,da$$

analogicky

$$dP_A(a) = -dZ_A(a) = \frac{dA}{A} = p_A(a)\,da$$

$$dP_M(a) = -dZ_M(a) = \frac{dM}{M} = p_M(a)\,da$$

Analytické vyjádření zrnitosti

- 2-parametrové
  3-parametrové funkce

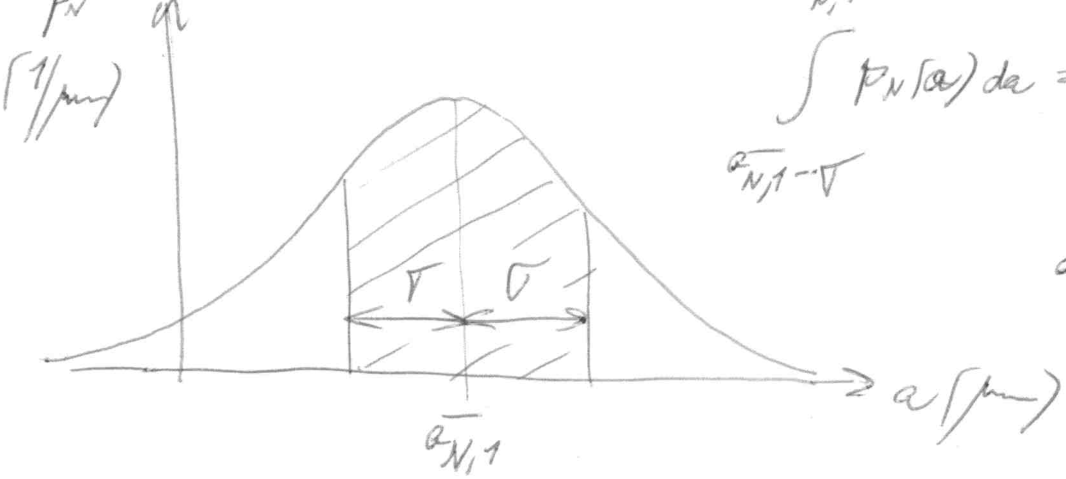
- v ČR obvykle 2-parametrové funkce
  - normální (pravděpodobnostní) rozdělení
  - logaritmicko-pravděpodobnostní rozdělení
  - rozdělení dle Rosina a Rammlera

Normální rozdělení velikostí částic

$$p_N(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(a-\bar{a}_{N,1})^2}{2\sigma^2}\right]$$ Gaussův vztah

parametry: $\bar{a}_{N,1}$
σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^N (a_i - \bar{a}_{N,1})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (a_i - \bar{a}_{N,1})^2 \cdot N_i}{N}}$$



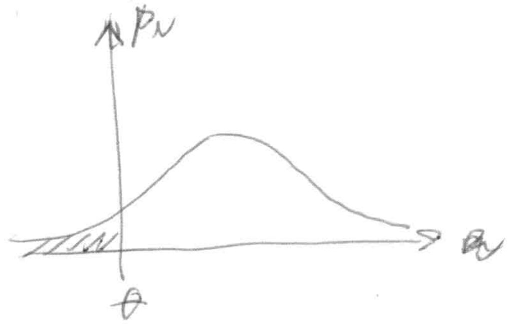
$$\int_{\bar{a}_{N,1}-\sigma}^{\bar{a}_{N,1}+\sigma} p_N(a)\,da = 0{,}683$$
(0,6827)

$\bar{a}_{N,1} \pm 2\sigma \approx 0{,}9545$

$\bar{a}_{N,1} \pm 3\sigma \approx 0{,}9973$

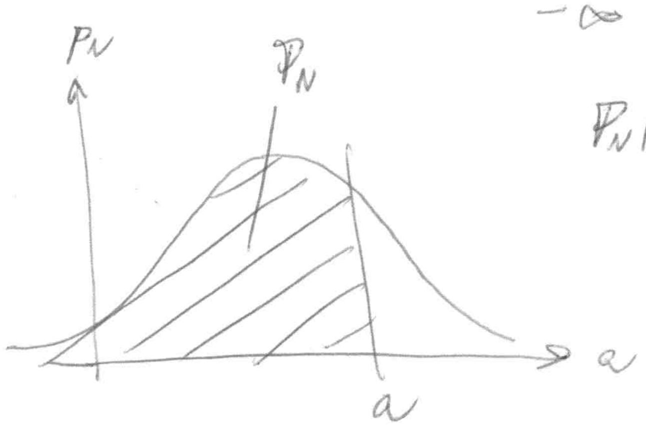
platí: $\bar{a}_{N,1} \doteq a_{med,N} \doteq a_{mod,N}$

nevýhody normálního rozdělení



Propad dle počtu

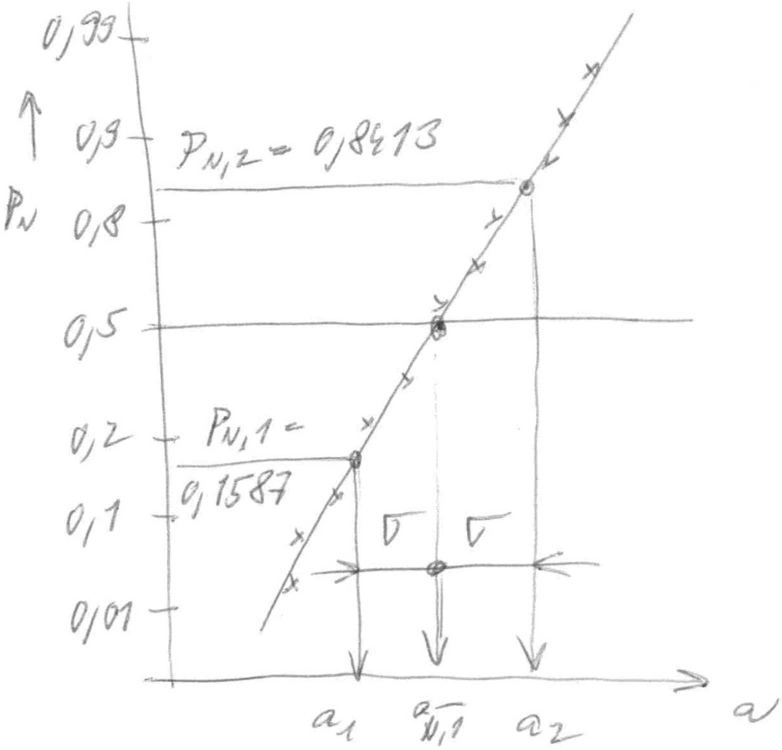
def. $\Phi_N(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} p_N(a)\,da$



$$\Phi_N(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} \exp\left[-\frac{(a-\bar{a}_{N,1})^2}{2\sigma^2}\right] da$$

nebo $Z_N(a) = \int\limits_{a}^{\infty} p_N(a)\,da$

Pravděpodobnostní síť – závislost $\Phi_N(a), Z_N(a)$ jako přímka



body 1 a 2

$\Phi_{N,1} = 0{,}1587$

$\Phi_{N,2} = 0{,}8413$

$\Phi_{N,2} - \Phi_{N,1} = 0{,}6827$

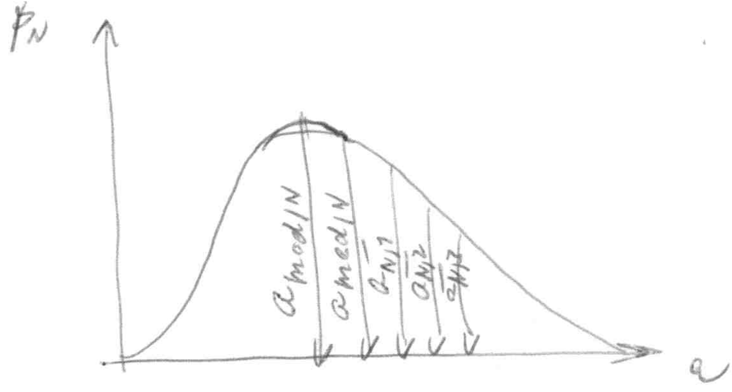
stanovení parametrů

$\sigma = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$

$\bar{a}_{N,1} = \frac{a_1 + a_2}{2}$

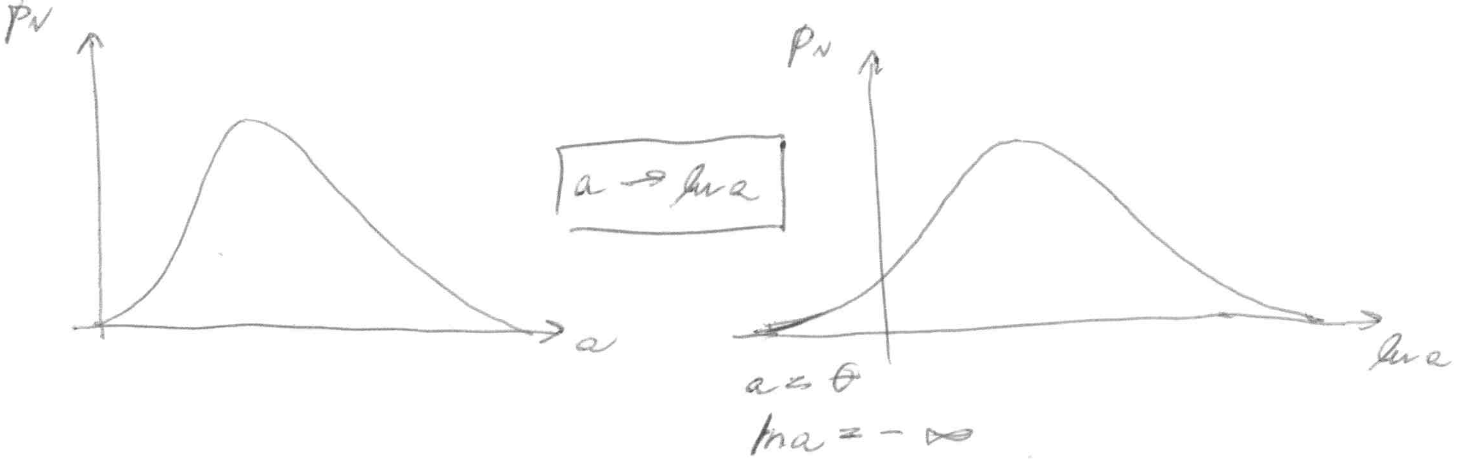
$\bar{a}_{N,1} = a_{med,N} = a_{mod,N}$

normální rozdělení – „monodisperzní" soubory reálné soubory – nesymetrické rozdělení



transformace nesymetrického rozdělení $\quad a \to \ln a$

$\Rightarrow$ <u>logaritmicko-pravděpodobnostní rozdělení</u>



$$p_N(a) = \frac{1}{a \ln \sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln a - \overline{\ln a})^2}{2\ln^2 \sigma_g}\right] = \left(\frac{dP_N(a)}{d(\ln a)}\right)$$

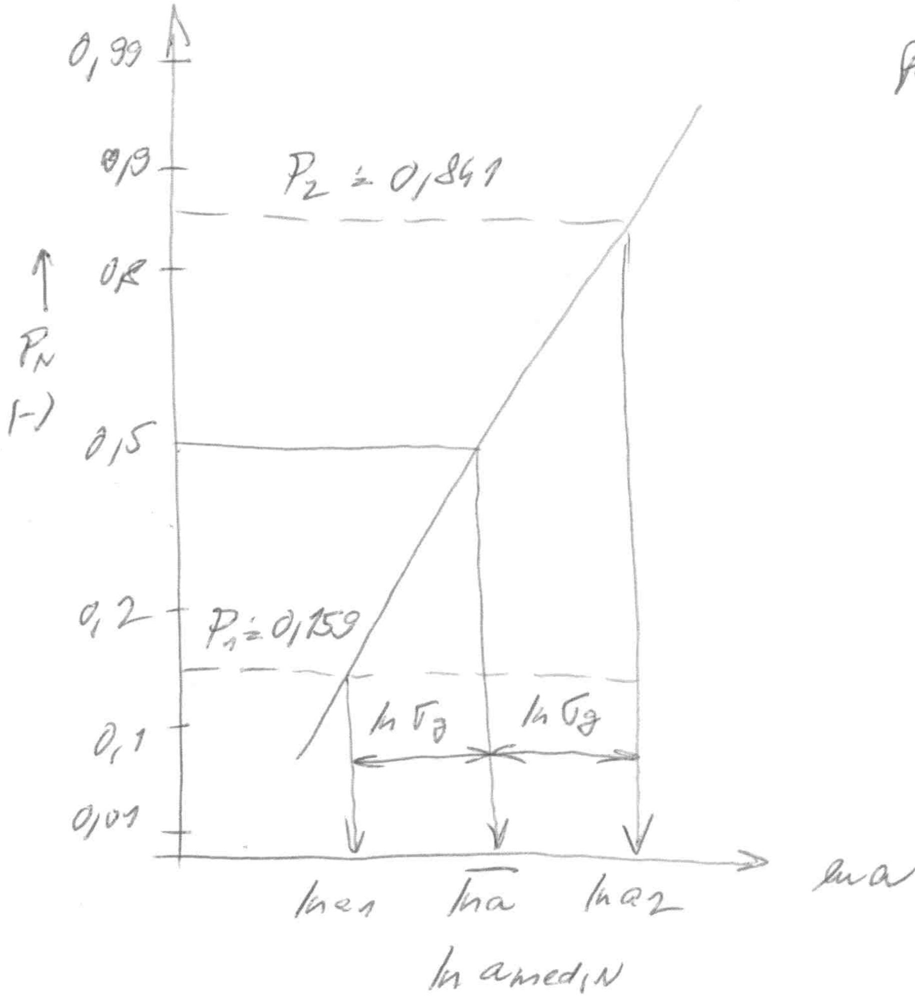
platí: $\overline{\ln a} \equiv \ln a_{med|N}$

$$\ln \sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_1^N (\ln a_i - \overline{\ln a})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\ln a_i - \overline{\ln a})^2 N_i}{N}}$$

Propad $P_N(a)$

$$P_N(a) = \int_0^a p_N(a)\, da = \frac{1}{\ln \sigma_g \sqrt{2\pi}} \int_0^a \frac{1}{a} \exp\left[-\frac{(\ln a - \ln a_{med|N})^2}{2\ln^2 \sigma_g}\right] da$$

Logaritmicko – pravděpodobnostní síť



Parametry rozdělení

$$\ln \sigma_g = \frac{1}{2}(\ln a_2 - \ln a_1) =$$

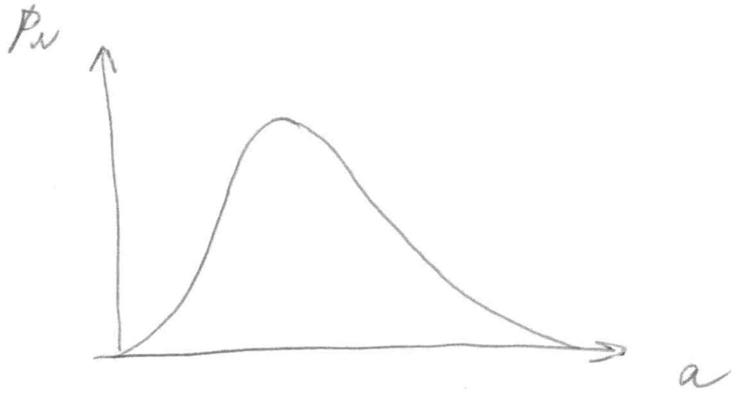
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{a_2}{a_1} = \ln\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$$

$$\ln a_{med,N} = \frac{1}{2}(\ln a_1 + \ln a_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln a_1 a_2 = \ln\sqrt{a_1 a_2}$$

$$a_{med,N} = \sqrt{\cancel{a_1}\cdot a_2}$$



Použití definičních vztahů a úpravy (substituce) do tvaru chybové funkce $\int e^{-x^2}$ " $\Longrightarrow$

$$a_{mod,N} = a_{med,N}\cdot \exp(-\ln^2 \sigma_g)$$

$$\overline{a_{N,1}} = a_{med,N}\cdot \exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 \sigma_g\right)$$

$$\overline{a_{N,2}} = a_{med,N} \cdot \exp\left(\frac{2}{2} \ln^2 \sigma_g\right)$$

$$\overline{a_{N,3}} = a_{med,N} \cdot \exp\left(\frac{3}{2} \ln^2 \sigma_g\right)$$

Rozdělení dle počtu → rozdělení dle průmětu hmotnosti

Logaritmicko – pravděpodobnostní rozdělení dle průmětu (A)

$$p_A(a) = \frac{a^2}{\overline{a_{N,2}}^2}\, p_N(a) \qquad \text{přepočet}$$

$$p_A(a) = \frac{1}{a \ln \sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln a - \ln a_{med,A})^2}{2 \ln^2 \sigma_g}\right]$$

platí: $a_{med,A} = a_{med,N} \cdot \exp(2 \ln^2 \sigma_g)$

$\ln a_{med,A} = \ln a_{med,N} + 2 \ln^2 \sigma_g$

Logaritmicko – pravděpodobnostní rozdělení dle hmotnosti (M)

$$p_M(a) = \frac{a^3}{\overline{a_{N,3}}^3}\, p_N(a) \qquad \text{přepočet}$$

$$p_M(a) = \frac{1}{a \ln \sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln a - \ln a_{med,M})^2}{2 \ln^2 \sigma_g}\right]$$

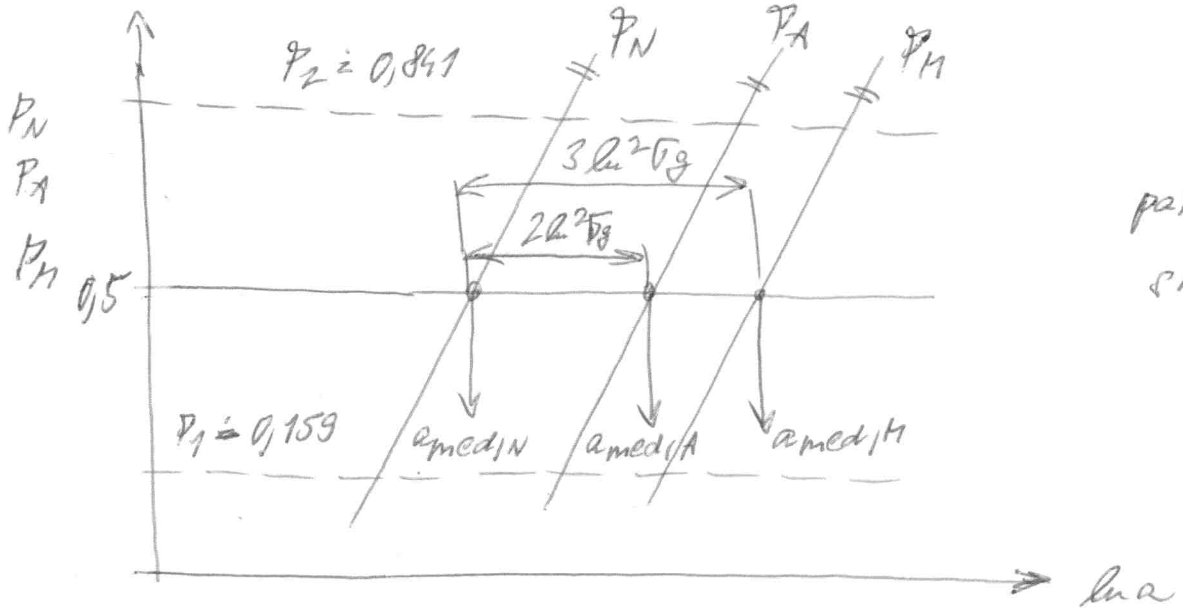
platí: $a_{med,M} = a_{med,N} \cdot \exp(3 \ln^2 \sigma_g)$

$\ln a_{med,M} = \ln a_{med,N} + 3 \ln^2 \sigma_g$

Vyjádření křivek propadů $P_N(a)$, $P_A(a)$ a $P_M(a)$ v log.-pravděpodobnostní síti

$$P_A(a) = \int_0^a p_A(a)\,da$$

$$P_M(a) = \int_0^a p_M(a)\,da$$



parametr $\ln\sigma_g$ shodný

Rozdělení dle Rosina a Rammlera

vyjádření závislosti $Z_M(a)$, resp. $P_M(a)$ pro prachy vzniklé při mechanických operacích (mletí, drcení, ...)

$$Z_M(a) = \exp\left[-\left(\frac{a}{a_R}\right)^n\right]$$

$$P_M = 1 - Z_M = 1 - \exp\left[-\left(\frac{a}{a_R}\right)^n\right]$$

- 2 parametry: a_R
  n – vyjadřuje polydisperzitu
- křivka četnosti dle hmotnosti – dle definice

$$p_M(a) = -\frac{dZ_M(a)}{da} = \ldots = \frac{n}{a_R^n}\,a^{n-1}\exp\left[-\left(\frac{a}{a_R}\right)^n\right]$$

- fyzikální význam parametru a_R

úprava vztahu pro $Z_n(a)$: $\frac{1}{Z_n(a)} = \exp\left(\frac{a}{a_R}\right)^n$

jestliže $\frac{1}{Z_n(a)} = e \; (= 2{,}7183)$ tj. $Z_n = \frac{1}{e} = 0{,}368$

potom $\ln e = 1 = \left(\frac{a}{a_R}\right)^n \Rightarrow a = a_R$ pro každé n

$\Rightarrow$ parametr a_R odpovídá velikosti částice, pro kterou je $Z_n = 0{,}368$, resp. $P_n = 0{,}632$

- kdy se závislost $P_n(a)$, resp. $Z_n(a)$ zobrazuje jako přímka?

$$Z_n(a) = \exp\left[-\left(\frac{a}{a_R}\right)^n\right]$$

$$\frac{1}{Z_n(a)} = \exp\left(\frac{a}{a_R}\right)^n$$

$$\ln\frac{1}{Z_n(a)} = \left(\frac{a}{a_R}\right)^n$$

$$\ln\left(\ln\frac{1}{Z_n(a)}\right) = n(\ln a - \ln a_R)$$

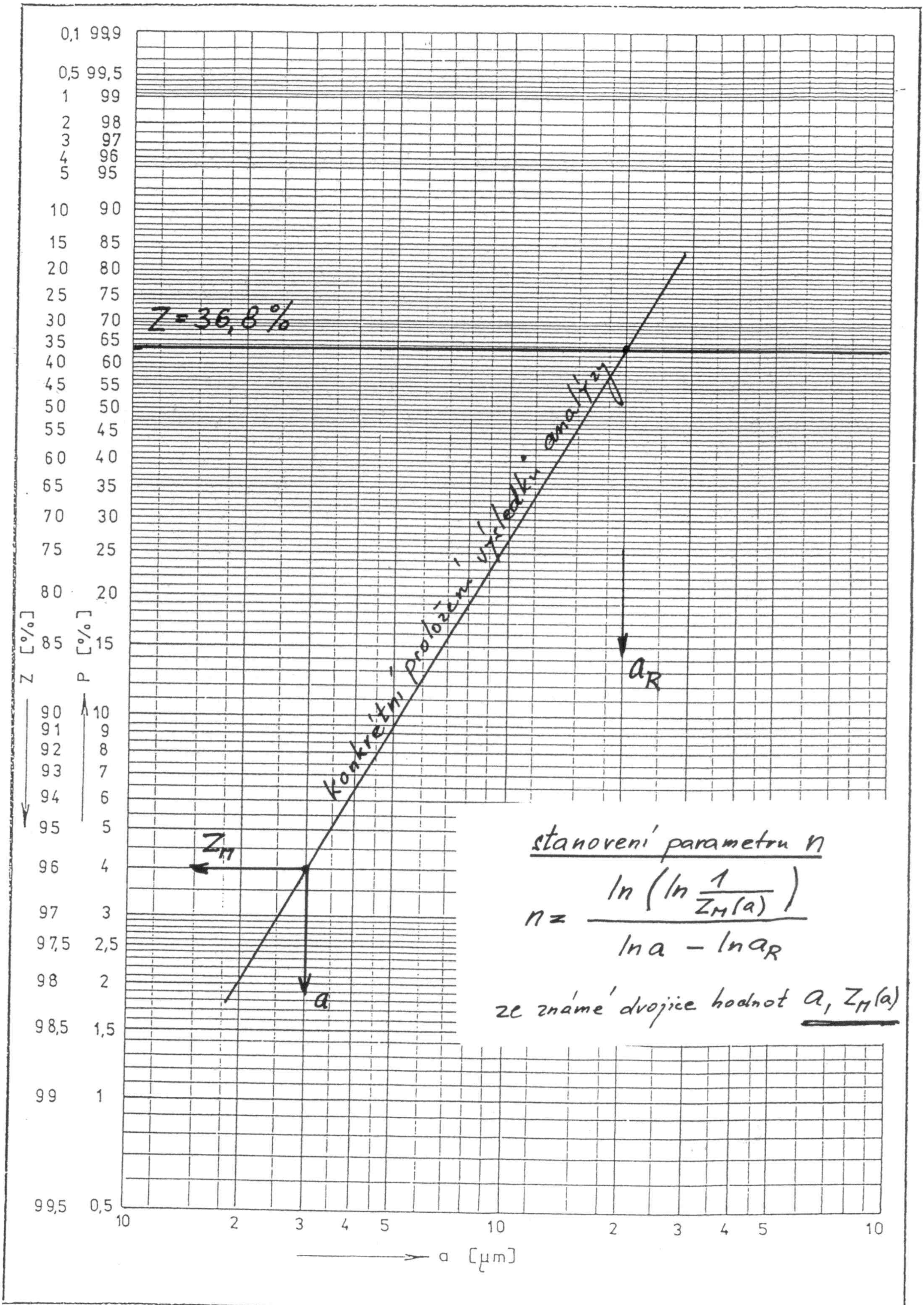
- v R-R síti se závislost $Z_n(a)$ zobrazuje jako přímka
- hodnota $a_R \leftarrow$ pro $Z_n = 0{,}368$
- n pomocí okrajového měřítka nebo dle:

$$n = \frac{\ln\left(\ln\frac{1}{Z_n(a)}\right)}{\ln a - \ln a_R}$$

Charakteristické velikosti rozdělení

$$a_{mod,n} = a_R \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}$$

$$a_{med,n} \doteq a_R \sqrt[n]{0,693}$$


Z = 36,8 %
konkrétní proložení výsledků analýzy
a_R
Z_M
a
Z [%]
P [%]
a [μm]
stanovení parametru n
$$n = \frac{\ln\left(\ln \frac{1}{Z_M(a)}\right)}{\ln a - \ln a_R}$$
ze známé dvojice hodnot a, $Z_M(a)$